

Matematyka

Matematyka jest nauką, która dostarcza narzędzi do poznawania środowiska i opisu zjawisk, dotyczących różnych aspektów działalności człowieka. Funkcjonowanie w konkretnych sytuacjach życiowych, rozwiązywanie typowych i nietypowych problemów, którym trzeba stawić czoła w różnych etapach życia, staje się łatwiejsze dzięki umiejętnościom kształconym przez matematykę. Podejmowanie właściwych decyzji, organizacja własnych działań czy precyzyjne porozumiewanie się często są niemożliwe bez umiejętności matematycznych. Znaczenie matematyki dla indywidualnego rozwoju jest nie do przecenienia.

Nauczanie matematyki w szkole powinno być dostosowane do konkretnego etapu rozwojowego i możliwości intelektualnych uczniów. Na I etapie edukacyjnym nauczanie matematyki powinno być organizowane w taki sposób, by uczniowie koncentrowali się na odniesieniach do znanej sobie rzeczywistości, a stosowane pojęcia i metody powinny być powiązane z obiektami, występującymi w znanym środowisku. Uczniowie muszą mieć szansę na stosowanie kształconych umiejętności w sytuacjach konkretnych, a poszukiwanie odpowiedzi na stawiane pytania powinno pomóc im w organizowaniu własnej nauki i osiągnięciu nowych możliwości działania. Ostatnie lata szkoły podstawowej to w przypadku matematyki czas na wprowadzenie takich pojęć i własności, które pozwolą na doskonalenie myślenia abstrakcyjnego, a w konsekwencji na naukę przeprowadzania rozumowań i poprawnego wnioskowania w sytuacjach nowych, a także dotyczących zagadnień złożonych i nietypowych.

MATEMATYKA

Cele kształcenia – wymagania ogólne

I. ~~Sprawności~~ Sprawność rachunkowa.

1. Wykonywanie nieskomplikowanych obliczeń w pamięci lub ~~w—działaniach~~ ~~trudniejszych~~ pisemnie oraz wykorzystanie tych umiejętności w sytuacjach praktycznych.
2. Weryfikowanie i interpretowanie otrzymanych wyników oraz ocena sensowności rozwiązania.

II. Wykorzystanie i tworzenie informacji.

1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w różnej formie oraz ich przetwarzanie.
2. Interpretowanie i tworzenie tekstów o charakterze matematycznym oraz graficzne przedstawianie danych.
3. Używanie języka matematycznego do opisu rozumowania i uzyskanych wyników.

III. Wykorzystanie i interpretowanie reprezentacji.

1. Używanie prostych, dobrze znanych obiektów matematycznych, interpretowanie pojęć matematycznych i operowanie obiektami matematycznymi.
2. Dobieranie modelu matematycznego do prostej sytuacji oraz budowanie go w różnych kontekstach, także w kontekście praktycznym.

IV. Rozumowanie i argumentacja.

1. Przeprowadzanie prostego rozumowania, podawanie argumentów uzasadniających poprawność rozumowania, rozróżnianie dowodu od przykładu.
2. Dostrzeganie regularności, podobieństw oraz analogii i formułowanie wniosków na ich podstawie.
3. Stosowanie strategii wynikającej z treści zadania, tworzenie strategii rozwiązania problemu, również w rozwiązaniach wieloetapowych oraz w takich, które wymagają umiejętności łączenia wiedzy z różnych działów matematyki.

Treści nauczania – wymagania szczegółowe

KLASY IV–VI

I. Liczby naturalne w dziesiętkowym układzie pozycyjnym. Uczeń:

- 1) zapisuje i odczytuje liczby naturalne wielocyfrowe;
- 2) interpretuje liczby naturalne na osi liczbowej;
- 3) porównuje liczby naturalne;
- 4) zaokrągla liczby naturalne;
- 5) liczby w zakresie do 3000 zapisane w systemie rzymskim przedstawia w systemie dziesiętkowym, a zapisane w systemie dziesiętkowym przedstawia w systemie rzymskim.

II. Działania na liczbach naturalnych. Uczeń:

- 1) dodaje i odejmuje w pamięci liczby naturalne dwucyfrowe lub większe, liczbę jednocyfrową dodaje do dowolnej liczby naturalnej i odejmuje od dowolnej liczby naturalnej;
- 2) dodaje i odejmuje liczby naturalne wielocyfrowe sposobem pisemnym i za pomocą kalkulatora;
- 3) mnoży i dzieli liczbę naturalną przez liczbę naturalną jednocyfrową, dwucyfrową lub trzycyfrową sposobem pisemnym, w pamięci (w najprostszych przykładach) i za pomocą kalkulatora (w trudniejszych przykładach);
- 4) ~~wykonuje dzielenie z resztą liczb naturalnych;~~
- 5) stosuje wygodne dla siebie sposoby ułatwiające obliczenia, w tym przemienność i łączność dodawania i mnożenia oraz rozdzielność mnożenia względem dodawania;
- 6) porównuje liczby naturalne z wykorzystaniem ich różnicy lub ilorazu;
- 7) rozpoznaje liczby podzielne przez 2, 3, 4, 5, 9, 10, 100;
- 8) rozpoznaje liczbę złożoną, gdy jest ona jednocyfrowa lub dwucyfrowa, a także gdy

na istnienie dzielnika właściwego wskazuje cecha podzielności;

- 9) ~~rozkłada liczby dwucyfrowe na czynniki pierwsze;~~
- 10) oblicza kwadraty i sześciany liczb naturalnych;
- 11) stosuje reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;
- 12) szacuje wyniki działań;
- 13) znajduje największy wspólny dzielnik (NWD) w sytuacjach nie trudniejszych niż typu NWD(600, 72), NWD(140, 567), NWD(10000, 48), ~~NWD(910, 2016)~~ oraz wyznacza najmniejszą wspólną wielokrotność dwóch liczb naturalnych metodą rozkładu na czynniki;
- 14) rozpoznaje wielokrotności danej liczby, kwadraty, sześciany, liczby pierwsze, liczby złożone;
- 15) odpowiada na pytania dotyczące liczebności zbiorów różnych rodzajów liczb wśród liczb z pewnego niewielkiego zakresu (np. od 1 do 200 czy od 100 do 1000), o ile liczba w odpowiedzi jest na tyle mała, że wszystkie rozważane liczby uczeń może wypisać;
- 16) rozkłada ~~liczby naturalne~~ na czynniki pierwsze ~~liczby naturalne~~ co najwyżej ~~trzy~~cyfrowe, w przypadku gdy co najwyżej jeden z tych czynników jest liczbą większą niż 10;
- 17) wyznacza wynik dzielenia z resztą liczby a przez liczbę b i zapisuje liczbę a w postaci: $a = b \cdot q + r$, gdzie $0 \leq r < b$.

III. Liczby całkowite. Uczeń:

- 1) podaje praktyczne przykłady stosowania liczb ujemnych;
- 2) interpretuje liczby całkowite na osi liczbowej;
- 3) oblicza wartość bezwzględna;
- 4) porównuje liczby całkowite;
- 5) wykonuje proste rachunki pamięciowe na liczbach całkowitych.

IV. Ułamki zwykłe i dziesiętne. Uczeń:

- 1) opisuje część danej całości za pomocą ułamka;
- 2) przedstawia ułamek jako iloraz liczb naturalnych, a iloraz liczb naturalnych jako ułamek zwykły;
- 3) skraca i rozszerza ułamki zwykłe;
- 4) sprowadza ułamki zwykłe do wspólnego mianownika;
- 5) przedstawia ułamki niewłaściwe w postaci liczby mieszanej, a liczbę mieszaną w postaci ułamka niewłaściwego;
- 6) zapisuje wyrażenia dwumianowane w postaci ułamka dziesiętnego i odwrotnie;
- 7) zaznacza ~~i odczytuje~~ ułamki zwykłe i dziesiętne na osi liczbowej oraz odczytuje ułamki zwykłe i dziesiętne zaznaczone na osi liczbowej;
- 8) zapisuje ułamki dziesiętne skończone w postaci ułamków zwykłych;
- 9) zamienia ułamki zwykłe o mianownikach będących dzielnikami liczb 10, 100, 1000 itd. na ułamki dziesiętne skończone dowolną metodą (przez rozszerzanie lub skracanie ułamków zwykłych, dzielenie licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora);

- 10) zapisuje ułamki zwykłe o mianownikach innych niż wymienione w pkt. 9 w postaci rozwinięcia dziesiętnego nieskończonego (~~z użyciem wielokropka po ostatniej cyfrze~~), uzyskane w wyniku dzielenia licznika przez mianownik w pamięci, pisemnie lub za pomocą kalkulatora;
- 11) w sytuacjach praktycznych zaokrągla ułamki dziesiętne do co najwyżej 2 miejsca po przecinku (zł/gr, m/cm, cm/mm itp.);
- 12) porównuje ułamki (zwykłe i dziesiętne);
- 13) oblicza liczbę, której część jest podana (wyznacza całość, z której część określono część za pomocą ułamka);
- 14) wyznacza liczbę, która powstaje po powiększeniu lub pomniejszeniu o pewną część innej liczby.

V. Działania na ułamkach zwykłych i dziesiętnych. Uczeń:

- 1) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki zwykłe o mianownikach jedno- lub dwucyfrowych, a także liczby mieszane;
- 2) dodaje, odejmuje, mnoży i dzieli ułamki dziesiętne w pamięci w przykładach najprostszych), pisemnie (w przypadku gdy składniki mają razem co najwyżej 6 cyfr różnych od zera) i za pomocą kalkulatora (w przykładach trudnych trudniejszych);
- ~~3) wykonuje nieskomplikowane rachunki, w których występują jednocześnie ułamki zwykłe i dziesiętne;~~
- 4) porównuje ułamki z wykorzystaniem ich różnicy;
- 5) oblicza ułamek danej liczby całkowitej;
- 6) oblicza kwadraty i sześciany ułamków zwykłych i dziesiętnych oraz liczb mieszanych;
- ~~7) oblicza wartość prostych wyrażeń arytmetycznych, stosując reguły dotyczące kolejności wykonywania działań;~~
- 8) wykonuje działania na ułamkach dziesiętnych, używając własnych, poprawnych strategii lub za pomocą kalkulatora;
- 9) oblicza wartości wyrażeń arytmetycznych, wymagających stosowania działań arytmetycznych na liczbach całkowitych lub na liczbach zapisanych za pomocą ułamków zwykłych, liczb mieszanych i ułamków dziesiętnych, także wymiernych ujemnych z uwzględnieniem reguł dotyczących kolejności wykonywania działań, o stopniu trudności nie większym niż w przykładzie

$$-\frac{1}{2} : 0,25 + 5,25 : 0,05 - 7\frac{1}{2} \cdot \left(2,5 - 3\frac{2}{3}\right) + 1,25$$

VI. Elementy algebry. Uczeń:

- 1) korzysta z nieskomplikowanych wzorów, w których występują oznaczenia literowe, opisuje wzór słowami;
- 2) stosuje oznaczenia literowe nieznanymi wielkościami liczbowymi i zapisuje proste wyrażenia algebraiczne na podstawie informacji osadzonych w kontekście praktycznym, na przykład zapisuje obwód trójkąta o bokach: a , $a + 2$, b ;
- 3) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą występującą po jednej stronie równania (przez zgadywanie, dopełnianie lub wykonanie działania

odwrotnego), na przykład $\frac{x-2}{3} = 4$.

VII. Proste i odcinki. Uczeń:

- 1) rozpoznaje i nazywa figury: punkt, prosta, półprosta, odcinek;
- 2) rozpoznaje proste i odcinki prostopadłe i równoległe; ~~na przykład jak w sytuacji określonej w zadaniu:
Odcinki AB i CD są prostopadłe, odcinki CD i EF są równoległe oraz odcinki EF i DF są prostopadłe. Określ wzajemne położenie odcinków DF oraz AB . Wykonaj odpowiedni rysunek;~~
- 3) rysuje pary odcinków prostopadłych i równoległych;
- 4) mierzy odcinek z dokładnością do 1 mm;
- 5) znajduje odległość punktu od prostej.

VIII. Kąty. Uczeń:

- 1) wskazuje w dowolnym kącie ramiona i wierzchołek;
- 2) mierzy z dokładnością do 1° kąty mniejsze niż 180° ;
- 3) rysuje kąty mniejsze od 180° ;
- 4) rozpoznaje kąt prosty, ostry i rozwarty;
- 5) porównuje kąty;
- 6) rozpoznaje kąty wierzchołkowe i przyległe oraz korzysta z ich własności.

IX. Wielokąty, koła i okręgi. Uczeń:

- 1) rozpoznaje i nazywa trójkąty ostrokątne, prostokątne, rozwartokątne, równoboczne i równoramienne;
- 2) konstruuje trójkąt o danych trzech bokach i ustala możliwość zbudowania trójkąta ~~na podstawie nierówności trójkąta o zadanych bokach;~~
- 3) stosuje twierdzenie o sumie kątów wewnętrznych trójkąta;
- 4) rozpoznaje i nazywa: kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok i trapez;
- 5) zna najważniejsze własności kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku i trapezu, rozpoznaje figury osiowoosymetryczne i wskazuje osie symetrii figur;
- 6) wskazuje na rysunku cięciwę, średnicę oraz promień koła i okręgu;
- 7) rysuje cięciwę koła i okręgu, a także, jeżeli dany jest środek okręgu, promień i średnicę;
- 8) w trójkącie równoramiennym wyznacza przy danym jednym kącie: miary pozostałych kątów; oraz przy danych obwodzie i długości jednego boku - długości pozostałych boków.

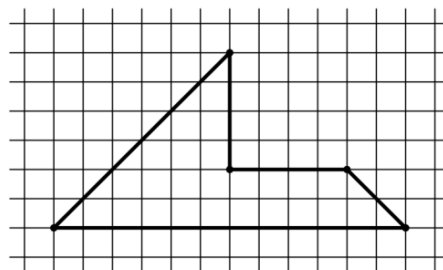
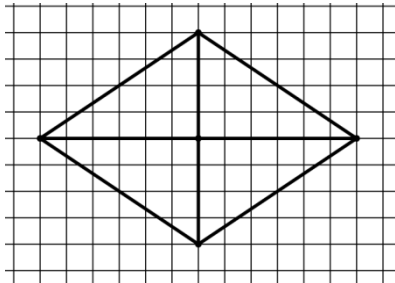
X. Bryły. Uczeń:

- 1) rozpoznaje graniastosłupy proste, ostrosłupy, walce, stożki i kule w sytuacjach praktycznych i wskazuje te bryły wśród innych modeli brył;
- 2) wskazuje wśród graniastosłupów prostopadłościanny i sześciiany i uzasadnia swój wybór;
- 3) rozpoznaje siatki graniastosłupów prostych i ostrosłupów;

- 4) rysuje siatki prostopadłościaków;
- 5) wykorzystuje podane zależności między długościami krawędzi graniastosłupa do wyznaczania długości poszczególnych krawędzi.

XI. Obliczenia w geometrii. Uczeń:

- 1) oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów;
- 2) oblicza obwód wielokąta o danych długościach boków;
- 3) oblicza pola: trójkąta, kwadratu, prostokąta, rombu, równoległoboku, trapezu, przedstawionych na rysunku oraz w sytuacjach praktycznych, w tym także dla danych wymagających zamiany jednostek ~~i w sytuacjach z nietypowymi wymiarami, na przykład pole trójkąta o boku 1 km i wysokości 1 mm;~~
- 4) stosuje jednostki pola: mm^2 , cm^2 , dm^2 , m^2 , km^2 , ar, hektar (bez zamiany jednostek w trakcie obliczeń);
- 5) oblicza pola wielokątów metodą podziału na mniejsze wielokąty lub uzupełniania do większych wielokątów jak w sytuacjach:



- 6) oblicza objętość i pole powierzchni prostopadłościanu przy danych długościach krawędzi;
- 7) stosuje jednostki objętości i pojemności: mililitr, litr, cm^3 , dm^3 , m^3 ;
- 8) ~~oblicza miary kątów, stosując przy tym poznane własności kątów i wielokątów.~~

XII. Obliczenia praktyczne. Uczeń:

- 1) interpretuje 100% danej wielkości jako całość, 50% – jako połowę, 25% – jako jedną czwartą, 10% – jako jedną dziesiątą, 1% – jako jedną setną części danej wielkości liczbowej;
- 2) w przypadkach osadzonych w kontekście praktycznym oblicza procent danej wielkości w stopniu trudności typu 50%, 20%, 10%;
- 3) wykonuje proste obliczenia zegarowe na godzinach, minutach i sekundach;
- 4) wykonuje proste obliczenia kalendarzowe na dniach, tygodniach, miesiącach, latach;
- 5) odczytuje temperaturę (dodatnią i ujemną);
- 6) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki długości: milimetr, centymetr, decymetr, metr, kilometr;
- 7) zamienia i prawidłowo stosuje jednostki masy: gram, dekagram, kilogram, tona;
- 8) oblicza rzeczywistą długość odcinka, gdy dana jest jego długość w skali oraz długość odcinka w skali, gdy dana jest jego rzeczywista długość;
- 9) w sytuacji praktycznej oblicza: drogę przy danej prędkości i czasie, prędkość przy

danej drodze i czasie, czas przy danej drodze i prędkości oraz stosuje jednostki prędkości km/h i m/s.

XIII. Elementy statystyki opisowej. Uczeń:

- 1) gromadzi i porządkuje dane;
- 2) odczytuje i interpretuje dane przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach, na przykład: wartości z wykresu, wartość największą, najmniejszą, opisuje przedstawione w tekstach, tabelach, na diagramach i na wykresach zjawiska przez określenie przebiegu zmiany wartości danych, na przykład z użyciem określenia „wartości rosną”, „wartości maleją”, „wartości są takie same” („przyjmowana wartość jest stała”).

~~XIII~~ XIV. Zadania tekstowe. Uczeń:

- 1) czyta ze zrozumieniem tekst zawierający informacje liczbowe;
- 2) wykonuje wstępne czynności ułatwiające rozwiązanie zadania, w tym rysunek pomocniczy lub wygodne dla niego zapisanie informacji i danych z treści zadania;
- 3) dostrzega zależności między podanymi informacjami;
- 4) dzieli rozwiązanie zadania na etapy, stosując własne, poprawne, wygodne dla niego strategie rozwiązania;
- 5) do rozwiązywania zadań osadzonych w kontekście praktycznym stosuje poznaną wiedzę z zakresu arytmetyki i geometrii oraz nabyte umiejętności rachunkowe, a także własne poprawne metody;
- 6) weryfikuje wynik zadania tekstowego, oceniając sensowność rozwiązania np. poprzez szacowanie, sprawdzanie wszystkich warunków zadania, ocenianie rzędu wielkości otrzymanego wyniku;
- 7) układa zadania i łamigłówki, rozwiązuje je; stawia nowe pytania związane z sytuacją w rozwiązującym zadaniu.

KLASY VII i VIII

I. Potęgi o podstawach wymiernych. Uczeń:

- 1) zapisuje iloczyn jednakowych czynników w postaci potęgi o wykładniku całkowitym dodatnim;
- 2) mnoży i dzieli potęgi o wykładnikach całkowitych dodatnich;
- 3) mnoży potęgi o różnych podstawach i jednakowych wykładnikach;
- 4) podnosi potęgę do potęgi;
- 5) odczytuje i zapisuje liczby w notacji wykładniczej $a \cdot 10^k$, gdy $1 \leq a < 10$, k jest liczbą całkowitą.

II. Pierwiastki. Uczeń:

- 1) oblicza wartości pierwiastków kwadratowych i sześciennych z liczb, które są odpowiednio kwadratami lub sześciانami liczb wymiernych;
- 2) szacuje wielkość danego pierwiastka kwadratowego lub sześciennego oraz

wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki;

- 3) porównuje wartość wyrażenia arytmetycznego zawierającego pierwiastki z daną liczbą wymierną oraz znajduje liczby wymierne większe lub mniejsze od takiej wartości, na przykład znajduje liczbę całkowitą a taką, że: $a \leq \sqrt{137} < a + 1$;
- 4) oblicza pierwiastek z iloczynu i ilorazu dwóch liczb, wyłącza liczbę przed znak pierwiastka i włącza liczbę pod znak pierwiastka;
- 5) mnoży i dzieli pierwiastki tego samego stopnia.

III. Tworzenie wyrażeń algebraicznych z jedną i z wieloma zmiennymi. Uczeń:

- 1) zapisuje wyniki podanych działań w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;
- 2) oblicza wartości liczbowe wyrażeń algebraicznych;
- 3) zapisuje zależności przedstawione w zadaniach w postaci wyrażeń algebraicznych jednej lub kilku zmiennych;
- 4) zapisuje rozwiązania zadań w postaci wyrażeń algebraicznych jak w przykładzie: Bartek i Grześ zbierali kasztany. Bartek zebrał n kasztanów, Grześ zebrał 7 razy więcej. Następnie Grześ w drodze do domu zgubił 10 kasztanów, a połowę pozostałych oddał Bartkowi. Ile kasztanów ma teraz Bartek, a ile ma Grześ?

IV. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych. Sumy algebraiczne i działania na nich. Uczeń:

- 1) porządkuje jednomiany i dodaje jednomiany podobne (tzn. różniące się jedynie współczynnikiem liczbowym);
- 2) dodaje i odejmuje sumy algebraiczne, dokonując przy tym redukcji wyrazów podobnych;
- 3) mnoży sumy algebraiczne przez jednomiany i dodaje wyrażenia powstałe z mnożenia sum algebraicznych przez jednomiany;
- 4) mnoży dwumian przez dwumian, dokonując redukcji wyrazów podobnych.

V. Obliczenia procentowe. Uczeń:

- 1) przedstawia **część** wielkości jako procent tej wielkości;
- 2) oblicza liczbę a równą p procent danej liczby b ;
- 3) oblicza, jaki procent danej liczby b stanowi liczba a ;
- 4) oblicza liczbę b , której p procent jest równe a ;
- 5) stosuje obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym, również w przypadkach **wielokrotnych dwukrotnych** podwyżek lub obniżek danej wielkości.

VI. Równania z jedną niewiadomą. Uczeń:

- 1) sprawdza, czy dana liczba jest rozwiązaniem równania (stopnia pierwszego, drugiego lub trzeciego) z jedną niewiadomą, na przykład sprawdza, które liczby całkowite niedodatnie i większe od -8 są rozwiązaniami równania $\frac{x^3}{8} + \frac{x^2}{2} = 0$;
- 2) rozwiązuje równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą metodą równań równoważnych;

- 3) rozwiązuje równania, które po prostych przekształceniach wyrażeń algebraicznych sprowadzają się do równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą;
- 4) rozwiązuje zadania tekstowe za pomocą równań pierwszego stopnia z jedną niewiadomą, w tym także z obliczeniami procentowymi;
- 5) przekształca proste wzory, aby wyznaczyć zadaną wielkość we wzorach geometrycznych (np. pól figur) i fizycznych (np. dotyczących prędkości, drogi i czasu).

VII. Proporcjonalność prosta. Uczeń:

- 1) podaje przykłady wielkości wprost proporcjonalnych;
- 2) wyznacza wartość przyjmowaną przez wielkość wprost proporcjonalną w przypadku konkretnej zależności proporcjonalnej, na przykład wartość zakupionego towaru w zależności od liczby sztuk towaru, ~~ilość zużytego paliwa w zależności od liczby przejechanych kilometrów, liczby przeczytanych stron książki w zależności od czasu jej czytania;~~
- 3) stosuje podział proporcjonalny.

VIII. Własności figur geometrycznych na płaszczyźnie. Uczeń:

- 1) zna i stosuje twierdzenie o równości kątów wierzchołkowych (z wykorzystaniem zależności między kątami przyległymi);
- 2) przedstawia na płaszczyźnie dwie proste w różnych położeniach względem siebie, w szczególności proste prostopadłe i proste równoległe;
- 3) korzysta z własności prostych równoległych, w szczególności stosuje równość kątów odpowiadających i naprzemianległych;
- 4) zna i stosuje cechy przystawiania trójkątów;
- 5) ~~zna i stosuje własności trójkątów równoramiennych (równość kątów przy podstawie);~~
- 6) zna nierówność trójkąta $AB + BC \geq AC$ i wie, kiedy zachodzi równość;
- 7) wykonuje proste obliczenia geometryczne wykorzystując sumę kątów wewnętrznych trójkąta i własności trójkątów równoramiennych;
- 8) zna i stosuje w sytuacjach praktycznych twierdzenie Pitagorasa (bez twierdzenia odwrotnego);
- 9) ~~stosuje twierdzenie Pitagorasa w celu obliczenia wysokości trójkąta równoramiennego;~~
- 10) przeprowadza dowody geometryczne o poziomie trudności nie większym niż w przykładach:
 - a) dany jest ostrokątny trójkąt równoramienny ABC , w którym $AC = BC$. W tym trójkącie poprowadzono wysokość AD . Udowodnij, że kąt ACB jest dwa razy większy od kąta BAD ,
 - b) na bokach BC i CD prostokąta $ABCD$ zbudowano, na zewnątrz prostokąta, dwa trójkąty równoboczne BCE i CDF . Udowodnij, że $AE = AF$.

IX. Wielokąty. Uczeń:

- 1) zna pojęcie wielokąta foremnego;

- 2) stosuje wzory na pole trójkąta, prostokąta, kwadratu, równoległoboku, rombu, trapezu, a także do wyznaczania długości odcinków o poziomie trudności nie większym niż w przykładach:
- oblicz najkrótszą wysokość trójkąta prostokątnego o bokach długości: 5 cm, 12 cm i 13 cm,
 - przekątne rombu $ABCD$ mają długości $AC = 8$ dm i $BD = 10$ dm. Przekątną BD rombu przedłużono do punktu E w taki sposób, że odcinek BE jest dwa razy dłuższy od tej przekątnej. Oblicz pole trójkąta CDE . (zadanie ma dwie odpowiedzi).

X. Oś liczbowa. Układ współrzędnych na płaszczyźnie. Uczeń:

- zaznacza na osi liczbowej zbiory liczb spełniających warunek taki jak $x \geq 1,5$ lub taki jak $x < -\frac{4}{7}$;
- znajduje współrzędne danych (na rysunku) punktów kratowych w układzie współrzędnych na płaszczyźnie;
- rysuje w układzie współrzędnych na płaszczyźnie punkty kratowe o danych współrzędnych całkowitych (dowolnego znaku);
- znajduje środek odcinka, którego końce mają dane współrzędne (całkowite lub wymierne) oraz znajduje współrzędne drugiego końca odcinka, gdy dany jest jeden koniec i środek;
- oblicza długość odcinka, którego końce są danymi punktami kratowymi w układzie współrzędnych;
- dla danych punktów kratowych A i B znajduje inne punkty kratowe należące do prostej AB .

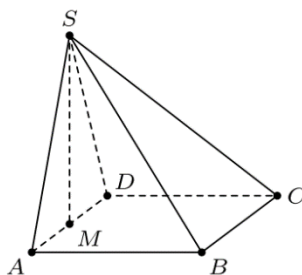
XI. Geometria przestrzenna. Uczeń:

- rozpoznaje graniastosłupy i ostrosłupy – w tym proste i prawidłowe;
- oblicza objętości i pola powierzchni graniastosłupów prostych, prawidłowych i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładowym zadaniu:

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny, którego dwa ~~równe~~ kąty mają **miarę** po 45° , a najdłuższy bok ma długość $6\sqrt{2}$ dm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastosłupie ścianą boczną o największej powierzchni, ma długość 4 dm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

- oblicza objętości **ostrosłupów** i pola powierzchni ostrosłupów prawidłowych, i takich, które nie są prawidłowe o poziomie trudności nie większym niż w przykładzie:

Prostokąt $ABCD$ jest podstawą ostrosłupa $ABCDS$, punkt M jest środkiem krawędzi AD , odcinek MS jest wysokością ostrosłupa. Dane są następujące długości krawędzi: $AD = 10$ cm, $AS = 13$ cm oraz $AB = 20$ cm.



Oblicz objętość ostrosłupa.

XII. Wprowadzenie do kombinatoryki i rachunku prawdopodobieństwa. Uczeń:

- 1) wyznacza zbiory obiektów, analizuje i oblicza, ile jest obiektów, mających daną własność, w przypadkach niewymagających stosowania reguł mnożenia i dodawania;
- 2) przeprowadza proste doświadczenia losowe, polegające na rzucie monetą, rzucie sześcienną kostką do gry, rzucie kostką wielościenne lub losowaniu kuli spośród zestawu kul, analizuje je i oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach losowych.

XIII. Odczytywanie danych i elementy statystyki opisowej. Uczeń:

- 1) interpretuje dane przedstawione za pomocą tabel, diagramów słupkowych i kołowych, wykresów, w tym także wykresów w układzie współrzędnych;
- 2) tworzy diagramy słupkowe i kołowe oraz wykresy liniowe na podstawie zebranych przez siebie danych lub danych pochodzących z różnych źródeł;
- 3) oblicza średnią arytmetyczną kilku liczb.

XIV. Długość okręgu i pole koła. Uczeń:

- 1) oblicza długość okręgu o danym promieniu lub danej średnicy;
- 2) oblicza promień lub średnicę okręgu o danej długości okręgu;
- 3) oblicza pole koła o danym promieniu lub danej średnicy;
- 4) oblicza promień lub średnicę koła o danym polu koła;
- ~~5) oblicza pole pierścienia kołowego o danych promieniach lub średnicach obu okręgów tworzących pierścień.~~

XV. Symetrie. Uczeń:

- 1) rozpoznaje symetralną odcinka i dwusieczną kąta;
- 2) zna i stosuje w zadaniach podstawowe własności symetralnej odcinka i dwusiecznej kąta jak w przykładzie przykładowym zadaniu:
Wierzchołek C rombu $ABCD$ leży na symetralnych boków AB i AD . Oblicz miary kątów tego rombu;
- 3) rozpoznaje figury osiowosymetryczne i wskazuje ich osie symetrii oraz uzupełnia figurę do figury osiowosymetrycznej przy danych: osi symetrii figury i części figury;
- 4) rozpoznaje figury środkowosymetryczne i wskazuje ich środki symetrii.

~~XVI. Zaawansowane metody zliczania. Uczeń:~~

- ~~1) stosuje regułę mnożenia do zliczania par elementów o określonych własnościach;~~
- ~~2) stosuje regułę dodawania i mnożenia do zliczania par elementów w sytuacjach, wymagających rozważenia kilku przypadków, na przykład w zliczaniu liczb naturalnych trzycyfrowych podzielnych przez 5 i mających trzy różne cyfry albo jak w zadaniu:~~

~~W klasie jest 14 dziewczynek i 11 chłopców. Na ile sposobów można z tej klasy wybrać dwuosobową delegację składającą się z jednej dziewczynki i jednego chłopca?~~

~~XVII. Rachunek prawdopodobieństwa. Uczeń:~~

- ~~1) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na rzucie dwiema kostkami lub losowaniu dwóch elementów ze zwracaniem;~~
- ~~2) oblicza prawdopodobieństwa zdarzeń w doświadczeniach, polegających na losowaniu dwóch elementów bez zwracania jak w przykładzie:~~

~~Z urny zawierającej kule ponumerowane liczbami od 1 do 7 losujemy bez zwracania dwie kule. Oblicz prawdopodobieństwo tego, że suma liczb na wylosowanych kulach będzie parzysta.~~

Warunki i sposób realizacji

~~Proponuje się, aby w latach 2017/18, 2018/19 i 2019/20 w klasie VII zrealizowano dodatkowo dział I pkt 5, dział II pkt 13–17, dział IV pkt 13 i 14, dział V pkt 9, dział IX pkt 8, dział X pkt 5 i dział XI pkt 4 podstawy programowej dla klas IV–VI, o ile nie zostały one wcześniej zrealizowane w klasach IV–VI.~~

~~Działy XIV–XVII podstawy programowej dla klas VII i VIII mogą zostać zrealizowane po egzaminie ósmoklasisty.~~

W klasach IV–VI, kiedy nauka matematyki odbywa się przede wszystkim na konkretnych obiektach, należy przede wszystkim zadbać o pracę na przykładach, bez wprowadzania nadmiaru pojęć abstrakcyjnych. Dużą pomocą dla ucznia jest możliwość eksperymentowania z liczbami, rozwiązywania zagadek logicznych i logiczno-matematycznych, a także ćwiczenia polegające na pracy lub zabawie z różnymi figurami lub bryłami w geometrii. W szczególności, rozwiązywanie równań przez zgadywanie powinno być w klasach IV–VI traktowane jako poprawna metoda.

W klasach IV–VI ~~zaleca się szczególną ostrożność przy wymaganiu od ucznia ścisłości języka matematycznego.~~ należy dbać o precyzję wypowiedzi, ale trzeba pamiętać o tym, aby unikać sytuacji, w której uczeń zostaje uznany za niezdolnionego matematycznie, gdy nie potrafi wyrazić poprawnego rozwiązania w sposób odpowiednio formalny, zgodnie z oczekiwaniami nauczyciela. Umiejętność posługiwania się takimi pojęciami matematycznymi jak: kąt, długość, pole, suma algebraiczna jest o wiele bardziej istotna niż zapamiętanie formalnej

definicji. W nauczaniu matematyki ~~istotne~~ ważne jest, aby uczeń zrozumiał sens reguł formalnych.

~~Większość uczniów w praktyce korzysta z kalkulatorów bądź innych urządzeń elektronicznych. Niemniej umiejętność wykonywania rachunków w pamięci, a także pisemnie, jest istotna. Obliczenia pamięciowe, w tym szacowanie wyników, bardzo przydają się w życiu codziennym. Samodzielne wykonywanie obliczeń, zarówno pamięciowych jak i pisemnych, daje uczniom o wiele lepsze wyobrażenie o liczbach i ich wielkościach, niż prowadzenie rachunków za pomocą sprzętu elektronicznego.~~

Nauczanie wielopoziomowe. Myślenie abstrakcyjne kształtuje się w wieku 11–15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie, i nie musi to oznaczać większych bądź mniejszych zdolności matematycznych. Z uwagi na różną szybkość rozwoju myślenia uczniów klas VII i VIII, a także, częściowo klasy VI, można rozważyć wprowadzenie nauczania matematyki w grupach międzyoddziałowych na różnych poziomach, podobnie jak to jest praktykowane w nauczaniu języków obcych nowożytnych. Grupy międzyoddziałowe realizowałyby różne partie materiału w tempie dostosowanym do możliwości uczniów, przy zachowaniu realizacji podstawy programowej. Takie podejście nie powinno dzielić uczniów na lepszych lub gorszych, ale ma umożliwić uczniom, u których myślenie abstrakcyjne rozwija się wolniej, płynne przejście do etapu myślenia abstrakcyjnego. Uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, należy proponować zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulować ich rozwój.

Sprawność rachunkowa. Umiejętność wykonywania działań w pamięci, poza ćwiczeniem pamięci i koncentracji, rozwija i wspomaga zdolność przeprowadzania rozumowań. Pożądaną umiejętnością u ucznia jest, by mając do obliczenia $23 + 49 + 77$, zauważył, że $23 + 77 = 100$, a więc ostateczny wynik sumy jest równy 149.

Wykonywanie działań pisemnie jest wstępem do bardziej zaawansowanych zagadnień. Dodawanie, odejmowanie i mnożenie pisemne przygotowuje do dodawania, odejmowania i mnożenia sum algebraicznych. Dzielenie pisemne przygotowuje do dzielenia wielomianu przez wielomian. Niemniej, wykonywanie działań pisemnych nie powinno prowadzić do uciążliwych rachunków.

Ułamki zwykłe. Uczeń powinien dobrze poznać i stosować zasady dodawania i odejmowania, mnożenia i dzielenia, oraz rozszerzania i skracania ułamków zwykłych. Aby dobrze opanować podstawowe działania na ułamkach, umiejętność tę należy systematycznie utrzymywać na II. etapie nauczania.

Kalkulatory. Uczeń powinien umieć korzystać z nowoczesnych metod wykonywania obliczeń, w tym za pomocą kalkulatora. Uczeń powinien zapoznać się z ograniczeniami (niektórych) kalkulatorów, mianowicie obliczenie pierwiastka z liczby całkowitej i podniesienie go do kwadratu niekoniecznie prowadzi do wyjściowej liczby, ze względu na błąd zaokrąglenia. Z tego samego powodu, obliczenie rozwinięcia dziesiętnego za pomocą kalkulatora a potem pomnożenie na kalkulatorze przez mianownik, niekoniecznie musi prowadzić do liczby całkowitej równej licznikowi. Inną sprawą jest znajdowanie rozwinięć okresowych za pomocą

kalkulatora: jeśli kalkulator wypisuje rozwinięcie dziesiętne ułamka jako na przykład 0,463417171, to uczeń powinien wiedzieć, że może to oznaczać zarówno 0,46341(71), jak i 0,463(417171), a nawet 0,4634171(70); naturalnie istnieją jeszcze inne możliwości.

Zadania na dowodzenie. Zadania na dowodzenie stanowią ważny element wykształcenia matematycznego. Uczeń powinien dowiedzieć się, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego...” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie powinien szukać przykładów bądź kontrprzykładów. Często takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwala uczniowi zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie.

W szkole podstawowej zadania na dowodzenie powinny być proste (w przypadku zdolnych uczniów można rozszerzyć stopień trudności). Oznacza to, że na przykład do dowodu zadania z geometrii powinno wystarczyć obliczanie kątów (z wykorzystaniem równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych, twierdzenia o sumie kątów trójkąta oraz twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego), użycie cech przystawiania trójkątów do uzasadnienia przystawiania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciągnięcie wniosków z tej własności.

Statystyka. Szczególną rolę w kształceniu matematycznym odgrywają zadania ze statystyki. Z jednej strony odczytywanie i prezentowanie danych wiąże matematykę z życiem codziennym i otwiera cały wachlarz zastosowań praktycznych. Zatem wskazane jest, aby znaczna część zadań dotyczyła danych rzeczywistych wraz z podaniem ich weryfikowalnego źródła. Z drugiej strony, na przykład operowanie wykresami zależności pozwala na intuicyjne opanowanie trudnych i abstrakcyjnych pojęć takich jak funkcja, monotoniczność, ekstrema, przy użyciu minimalnej wiedzy matematycznej (nie należy wprowadzać tych pojęć w szkole podstawowej). Stanowi to wstęp do wprowadzenia tych pojęć w szkole ponadpodstawowej.

Warto przy tym dodać, że operowanie na danych rzeczywistych wiąże się ze sporą złożonością rachunkową. Uczniowie powinni być nauczeni, jak efektywnie wspomagać się sprzętem elektronicznym (kalkulator, komputer) przy wykonywaniu zadań ze statystyki.

~~Myślenie abstrakcyjne kształtuje się w wieku 11–15 lat, ale u wielu dzieci w różnym tempie, nie musi to oznaczać większych bądź mniejszych zdolności matematycznych. Z uwagi na różną szybkość rozwoju myślenia uczniów klas VII i VIII, a także, częściowo klasy VI, można rozważyć wprowadzenie nauczania matematyki w grupach międzyoddziałowych na różnych poziomach, podobnie jak to jest praktykowane w nauczaniu języków obcych nowożytnych. Grupy międzyoddziałowe realizowałyby różne partie materiału w tempie dostosowanym do możliwości uczniów, przy zachowaniu realizacji podstawy programowej. Takie podejście nie powinno dzielić uczniów na lepszych lub gorszych, ale ma umożliwić uczniom, u których myślenie abstrakcyjne rozwija się wolniej, płynne przejście do etapu myślenia abstrakcyjnego. Uczniom, u których to myślenie rozwinęło się szybciej, należy proponować zadania trudniejsze i pozwalające na głębszą analizę zagadnień, aby właściwie stymulować ich rozwój.~~

~~Zadania na dowodzenie stanowią ważny element wykształcenia matematycznego. Uczeń powinien dowiedzieć się, że w twierdzeniach zaczynających się od słów „wykaż, że dla każdego...” podawanie wielu przykładów nie jest dowodem, a podanie jednego kontrprzykładu~~

świadczy o tym, że stwierdzenie nie jest prawdziwe. Nie oznacza to, że uczeń nie powinien szukać przykładów bądź kontrprzykładów. Często takie poszukiwanie i sprawdzanie prawdziwości tezy dla konkretnych przypadków pozwala uczniowi zrozumieć postawiony problem, a następnie podać ogólne rozumowanie.

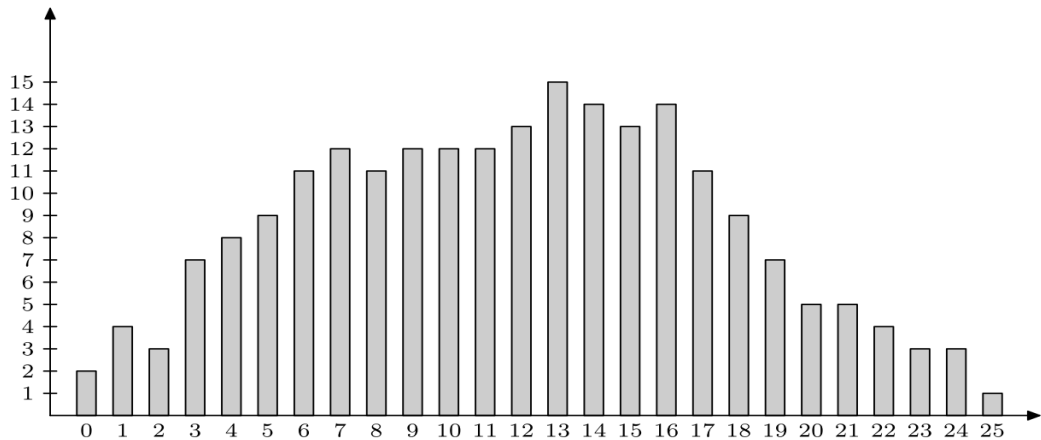
W szkole podstawowej zadania na dowodzenie powinny być proste (w przypadku zdolnych uczniów można rozszerzyć stopień trudności). Oznacza to, że na przykład do dowodu zadania z geometrii powinno wystarczyć obliczanie kątów (z wykorzystaniem równości kątów wierzchołkowych, odpowiadających i naprzemianległych, twierdzenia o sumie kątów trójkąta oraz twierdzenia o kątach przy podstawie trójkąta równoramiennego), użycie cech przystawiania trójkątów do uzasadnienia przystawiania jednej dostrzeżonej pary trójkątów przystających oraz wyciągnięcie wniosków z tej własności.

Wprowadzenie do rachunku prawdopodobieństwa należy poprzedzić zadaniami, w których uczniowie wykonują doświadczenia, na przykład wielokrotne rzuty kostką. Można wówczas wskazać związek pomiędzy częstością zdarzenia a jego prawdopodobieństwem.

Szczególną rolę w kształceniu matematycznym odgrywają zadania ze statystyki. Z jednej strony odczytywanie i prezentowanie danych, wiąże matematykę z życiem codziennym i otwiera cały wachlarz zastosowań praktycznych. Wskazane jest, aby znaczna część zadań dotyczyła danych rzeczywistych wraz z podaniem ich weryfikowalnego źródła. Z drugiej strony, na przykład operowanie wykresami zależności pozwala na intuicyjne opanowanie trudnych i abstrakcyjnych pojęć takich jak funkcja, monotoniczność, ekstrema, przy użyciu minimalnej wiedzy matematycznej (nie należy wprowadzać tych pojęć w szkole podstawowej). Stanowi to wstęp do wprowadzenia tych pojęć w szkole ponadpodstawowej. Dla przykładu załączono kilka zadań ze statystyki, z których część może być wykorzystana na zajęciach, bądź w projektach edukacyjnych uczniowskich.

1. We wszystkich trzech klasach VI w pewnej szkole przeprowadzono ankietę „Jaki smak lodów lubisz najbardziej?”. W ankiecie wzięli udział wszyscy uczniowie z tych klas. Wyniki, jakie otrzymano, były następujące: w klasie VIa 12 osób wybrało lody czekoladowe, 7 osób lody waniliowe, a 6 osób lody truskawkowe. W klasie VIb 5 osób wybrało lody waniliowe, 10 osób lody truskawkowe, a 6 osób lody czekoladowe. W ostatniej klasie VIc po 7 osób wybrało lody truskawkowe i lody czekoladowe, a 9 osób lody waniliowe. Wykonaj diagram słupkowy przedstawiający wyniki tejankiety. Odczytaj, które lody cieszą się największą popularnością w klasach VI w tej szkole.
2. Odczytaj z prognozy pogody (podanej w formie meteorogramu), w którym z najbliższych dni prognozowana temperatura będzie największa. Podaj w jakich godzinach, według prognozy, temperatura powietrza będzie rosła, a w jakich malała. W którym z najbliższych dni pogoda będzie najlepsza do organizacji wycieczki? Odpowiedz uzasadnij.
3. W konkursie matematycznym startowało 220 uczniów. Każdy zawodnik mógł uzyskać maksymalnie 25 punktów. Poniższy diagram

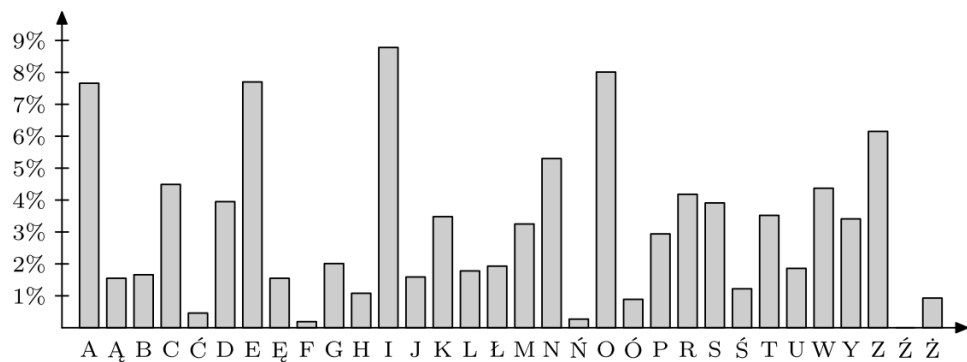
slupkowy pokazuje, ilu uczniow uzyskalo poszczegolne liczby punktow od 0 do 25. Do nastepnego etapu konkursu przechodzi 20% uczestnikow, ktorzy uzyskali najlepsze wyniki. Wojtek dostal 19 punktow. Czy przejdzie on do nastepnego etapu?

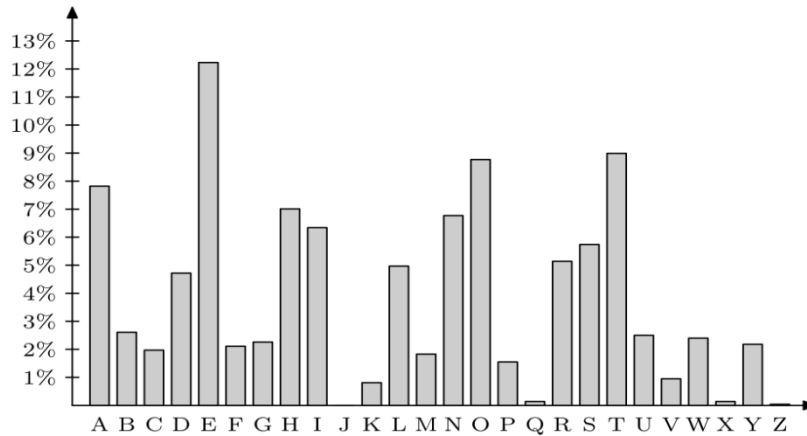


(Odp.: tak)

4. Wybierz stronę dowolnego tekstu napisanego w języku polskim. Policz wszystkie litery w tym tekście oraz policz liczbę wystąpień każdej litery alfabetu polskiego. Możesz to łatwo zrobić zapisując cały tekst na przykład w programie *Word*, a następnie zamieniając każdą literę na przykład na gwiazdkę (użyj: *Zmień*, a następnie *Zmień wszystko*; komputer wskaże Ci liczbę dokonanych zmian – jest to liczba wystąpień zamienianej litery w całym tekście). Oblicz częstość występowania każdej litery w całym tekście. Sporządź diagram słupkowy znalezionych częstości występowania. Porównaj otrzymany diagram z diagramami otrzymanymi przez Twoich kolegów na podstawie wybranych przez nich tekstów. Czy te diagramy są podobne? Zrób analogiczne ćwiczenie dla tekstów napisanych w innych językach (na przykład w języku angielskim). Czy otrzymane diagramy częstości są podobne do diagramów dla języka polskiego?

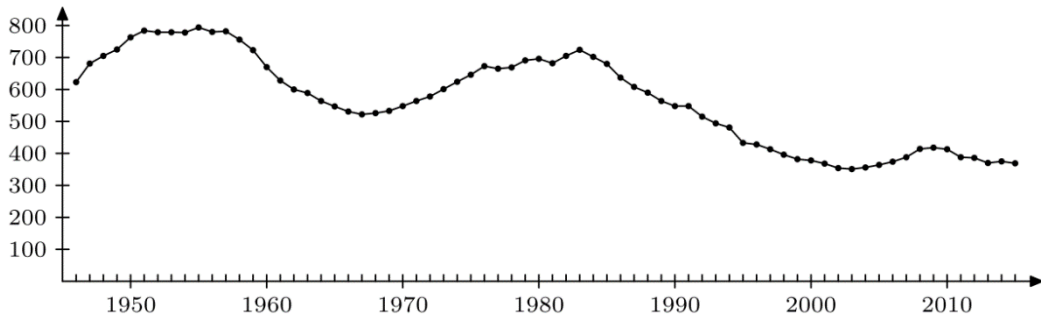
Odp.: odpowiednie diagramy słupkowe sporządzone na podstawie pierwszych 72 wersów *Pana Tadeusza* oraz pierwszych czterech akapitów powieści *Hobbit* w języku angielskim wyglądają następująco:





5. ~~Znajdź dane dotyczące liczby urodzin dzieci w Polsce w latach 1946-2015. Sporządź wykres liniowy tych danych (odpowiednio zaokrąglonych). Czy możesz wyjaśnić skąd się biorą znaczne różnice w liczbie urodzin (tzw. wyższe i niższe demograficzne)?~~

~~— Odp.: ten wykres wygląda następująco (dane w tysiącach urodzin):~~



6. ~~Maciek dostał 10 ocen z matematyki. Oto 9 z nich: 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 6. Średnia arytmetyczna wszystkich dziesięciu jego ocen jest równa 3,6. Wyznacz brakującą ocenę.~~

7. ~~Oblicz pole kwadratu według wzoru $P = a^2$ dla następujących wartości a : $a = \frac{1}{4}$, $a = \frac{1}{2}$, $a = \frac{3}{4}$, $a = 1$, $a = \frac{5}{4}$, $a = \frac{3}{2}$, $a = \frac{7}{4}$ oraz $a = 2$.~~

~~Każdą z obliczonych wartości zaznacz na wykresie w układzie współrzędnych, w którym jednostka na osi poziomej (na której są zaznaczone wyłącznie wartości a) ma długość 6 cm, a jednostka na osi pionowej (na której są zaznaczone obliczone wartości P) ma długość 2 cm.~~

8. ~~Janek poszedł na wycieczkę pieszą. Od godziny 8⁰⁰ do godziny 10⁰⁰ szedł pod górę z prędkością 4 km/h; od godziny 10⁰⁰ do godziny 10³⁰ odpoczywał na szczycie góry; od godziny 10³⁰ do godziny 12⁰⁰ szedł z góry z prędkością 6 km/h; od godziny 12⁰⁰ do godziny 14⁰⁰ szedł po poziomej drodze z prędkością 5 km/h.~~

~~Począwszy od godziny 8^{00} do godziny 14^{00} , co 15 minut oblicz, jaką drogę przeszedł od początku wycieczki do danej chwili. Obliczone wielkości zaznacz na wykresie w układzie współrzędnych.~~