8.1. Zadania na dowodzenie

Twierdzenie matematyczne i jego dowód

Twierdzenie matematyczne to zdanie, którego prawdziwość można udowodnić.
W każdym twierdzeniu wyróżniamy dwie części: założenie i tezę.

Jeśli założenie, to teza.

Np.
Jeśli ostatnią cyfrą liczby naturalnej jest 5, to ta liczba jest podzielna przez 5.

Wskazanie założenia i tezy często pomaga w przeprowadzeniu dowodu:
- założenie to fakty, z których możemy korzystać podczas dowodzenia („dane”),
- teza to fakt, do którego mamy dojść w naszym rozumowaniu („szukane”).

Co zrobić, żeby udowodnić własności liczb

Wykonaj obliczenia
- skróć ułamki
- wyłącz (włącz) czynnik przed (pod) znak pierwiastka
- wykonaj działania na potęgach

Zobacz Przykłady 2, 3.

Zapisz w postaci wyrażenia algebraicznego
- opisz rozważaną własność liczb za pomocą wyrażenia algebraicznego

Zobacz Przykład 4.

Wykonaj przekształcenia algebraiczne
- przekształć wyrażenia
- wykonaj działania
- zredukuj wyrazy podobne

Zobacz Przykład 4.

Najbardziej użyteczne narzędzia przy dowodzeniu własności liczb

Podstawowe wzory
- działania na potęgach (s. 58)
- działania na pierwiastkach (s. 65)
- kolejność wykonywania działań

Zobacz Przykłady 2, 3.

Podzielność
- cechy podzielności (s. 12)
- działania na liczbach parzystych, nieparzystych

Zobacz Przykłady 4, 5.

Szacowanie
- zasady zaokrąglania liczb (s. 21)
- działania na liczbach dodatnich, ujemnych

Zobacz Przykład 1.

Co zrobić, żeby udowodnić własności figur

Wykonaj rysunek
- wprowadź wygodne oznaczenia
- oznacz znane kąty, boki itp.
- wyróżnij równe kąty, odcinki
- użyj różnych grubości lub rodzajów linii

Zobacz Przykład 9.

Oblicz lub przekształć
- zapisz potrzebne wzory i zależności
- przekształć wzory
- wykonaj obliczenia

Zobacz Przykłady 6, 7, 8.

Dorysuj przydatny element
- uzupełnij dany rysunek, aby pokazać podane zależności lub użyć odpowiednich wzorów

Zobacz Przykład 8.

Najbardziej użyteczne narzędzie przy dowodzeniu własności figur

Pojęcia geometryczne
- równoległość, prostopadłość (s. 91)
- rodzaje kątów (s. 90)
- obwód, pole, objętość (s. 111, 129, 142)
- przystawanie figur (s. 94)

Zobacz Przykłady 7, 9, 10.

Własności figur i brył
- wielokąty (s. 91, 92, 93)
- graniastosłupy (s. 128, 129)
- ostrosłupy (s. 141, 142)

Zobacz Przykłady 6, 7, 8, 10.

Wzory i fakty
- suma kątów w trójkącie (s. 92)
- twierdzenie Pitagorasa (s. 104)
- cechy przystawania figur (s. 94)
- pola i obwody figur (s. 111)
- pola i objętości brył (s. 129, 142)

Zobacz Przykłady 6, 7, 8.

Przykłady i ćwiczenia

PRZYKŁAD 1

W wyrażeniach A i B niektóre cyfry zastąpiono gwiazdkami. Uzasadnij, że wartość A jest mniejsza od wartości B.

$A = 8* + 8** + 8***,\quad B = 2** \cdot 5*$

Rozwiązanie

Zauważmy, że:

- $8* < 90$, $8** < 900$ i $8*** < 9000$, więc $A < 90 + 900 + 9000 = 9990 < 10\,000$.
- $2** \geqslant 200$ i $5* \geqslant 50$, więc $B \geqslant 200 \cdot 50 = 10\,000$, czyli $10\,000 \leqslant B$.

Zatem $A < 10\,000 \leqslant B$, czyli $A < B$.

ĆWICZENIE 1

Bez wykonywania dokładnych obliczeń uzasadnij, że wartość sumy $99 + 198 + 297 + 396$ jest mniejsza od 1000.

PRZYKŁAD 2

Dane są liczby $x = \sqrt{605} - \sqrt{125}$ i $y = \sqrt{20} + \sqrt{80}$. Uzasadnij, że są one równe.

Rozwiązanie

Mamy:

$$x = \sqrt{605} - \sqrt{125} = \sqrt{121 \cdot 5} - \sqrt{25 \cdot 5} = 11\sqrt{5} - 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

$$y = \sqrt{20} + \sqrt{80} = \sqrt{4 \cdot 5} + \sqrt{16 \cdot 5} = 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$$

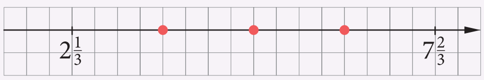
Zatem $x = y$.

ĆWICZENIE 2

Dane są liczby $a = \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{54}$ i $b = \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{128}$. Uzasadnij, że są one równe.

PRZYKŁAD 3

Na osi liczbowej wskazano położenie dwóch liczb: $2\frac{1}{3}$ i $7\frac{2}{3}$ oraz zaznaczono kropkami trzy inne liczby. Uzasadnij, że jedna z liczb oznaczonych kropką jest całkowita.



Rozwiązanie

Odcinek osi liczbowej od $2\frac{1}{3}$ do $7\frac{2}{3}$ jest podzielony na cztery jednakowe odcinki długości

$$\left(7\tfrac{2}{3} - 2\tfrac{1}{3}\right) : 4 = 5\tfrac{1}{3} : 4 = \tfrac{16}{3} : 4 = \tfrac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

Kolejnymi kropkami oznaczono więc liczby:

$2\frac{1}{3} + 1\frac{1}{3} = 3\frac{2}{3}$,

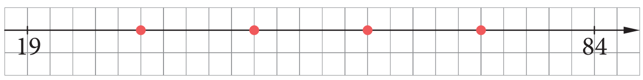
$3\frac{2}{3} + 1\frac{1}{3} = 5$,

$5 + 1\frac{1}{3} = 6\frac{1}{3}$.

Liczba oznaczona środkową kropką jest całkowita.

ĆWICZENIE 3

Na osi liczbowej wskazano położenie liczb 19 i 84 oraz zaznaczono kropkami cztery inne liczby. Uzasadnij, że jedna z liczb oznaczonych kropką jest podzielna przez 3.



PRZYKŁAD 4

Uzasadnij, że jeśli od liczby trzycyfrowej odejmiemy sumę jej cyfr, to otrzymany wynik jest podzielny przez 3.

Rozwiązanie

Liczbę trzycyfrową o cyfrze setek a, cyfrze dziesiątek b i jedności c można zapisać następująco:
$100a + 10b + c$.
Po odjęciu od niej sumy jej cyfr mamy:
$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b$.
Otrzymana liczba jest podzielna przez 3, ponieważ jest sumą liczb podzielnych przez 3.

ĆWICZENIE 4

Uzasadnij, że aby obliczyć 25% pewnej liczby dodatniej, wystarczy wziąć połowę tej liczby i z otrzymanego wyniku znów wziąć połowę.

PRZYKŁAD 5

Oceń, czy prawdziwe jest stwierdzenie:
Średnia arytmetyczna dwóch liczb parzystych jest liczbą parzystą.

Rozwiązanie

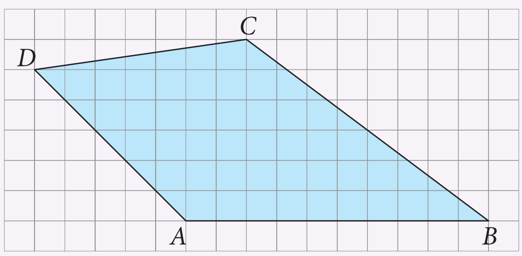
Kiedy mamy ocenić prawdziwość stwierdzenia, warto rozważyć istnienie **kontrprzykładu**, czyli przykładu pokazującego, że dane zdanie **nie jest prawdziwe**.
To stwierdzenie nie jest prawdziwe. Na przykład średnia arytmetyczna liczb parzystych 4 i 6 jest równa $\frac{4+6}{2} = 5$, czyli nie jest liczbą parzystą.

ĆWICZENIE 5

Oceń, czy prawdziwe jest stwierdzenie:
Średnia arytmetyczna dwóch liczb nieparzystych jest liczbą nieparzystą.

PRZYKŁAD 6

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ przedstawiony na rysunku jest deltoidem.



Rozwiązanie

Deltoid to czworokąt, który ma dwie pary sąsiednich boków równej długości.
Uzasadnimy, że $|BA| = |BC|$ i $|DA| = |DC|$.
Czworokąt umieszczony jest na tle kwadratowej siatki. Przyjmijmy, że kwadraty tworzące tę siatkę mają bok długości 1. Wówczas:
$|BA| = 10$ i $|BC| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$,
czyli $|BA| = |BC|$.
$|DA| = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}$ i $|DC| = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$,
czyli $|DA| = |DC|$.
Czworokąt ma dwie pary sąsiednich boków równych, więc jest deltoidem.

ĆWICZENIE 6

Uzasadnij, że czworokąt $ABCD$ przedstawiony na rysunku jest deltoidem.